ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

41

Кубы в кубе

ISSN 2225-1782
00041
9 772225 178772

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 41, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Уважаемые читатели! Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко
Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 331-94-27.
Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 – 21.00)
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»
РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: ООО «Компания Юнивест Маркетинг», 08500, Украина, Киевская область, г. Фастов, ул. Полиграфическая, 10
ТИРАЖ: 68 000 экз.
Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.
Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.
Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 27.08.2013

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Язык символов Работа Гёделя, пошатнувшая основы, на которых стояла вся математика двух последних тысячелетий, стала стимулом к поискам альтернативных подходов и спровоцировала споры о том, что же такое истина.

Математические премии Существуют различные премии, вручаемые как математикам первой величины, так и студентам всего мира в знак признания их заслуг. Среди этих наград особое место занимают Филдсовская и Абелевская премии.

Блистательные умы

Игры разума Джон Форбс Нэш сыграл главную роль в первом экспериментальном исследовании дилеммы заключенного, затем занялся изучением игр с нулевой суммой, в которых игроки преследуют прямо противоположные цели. Одним из важнейших его открытий стало так называемое равновесие Нэша, которое легло в основу новой экономической теории. За это открытие Нэш был удостоен Нобелевской премии по экономике в 1994 году.

Математика на каждый день

Доказательства с помощью компьютера С момента появления логарифмов математики постоянно искали способы избежать сугубо механических вычислений, которые представляли собой исключительно потерю времени. Однако настал момент, когда машины оказались способны смоделировать дедуктивные рассуждения — нечто, что ранее было свойственно исключительно человеку. Именно тогда у некоторых ученых сложилось мнение, что машины вступили на некую запретную территорию.

Математические задачки

Прогулки строем А вы любите порядок? Чтобы дети ходили колоннами и каждый ребенок стоял рядом со всеми остальными ровно один раз? Чтобы каждая из девушек, живущих в пансионе, поочередно прогуливалась со своими подругами, но не более одного раза? Чтобы в случае необходимости каждая из них исполнила роль воспитательницы ровно один раз? Не волнуйтесь, это всего лишь головоломки известного французского математика Эдуарда Люка.

Головоломки

Кубы в кубе Увидев головоломку «Кубы в кубе» в первый раз, вы можете сказать, что разобрать ее невозможно. Для этого нужно найти первый элемент головоломки, который можно извлечь, — так называемый ключ. Далее путем несложных рассуждений несколькими простыми движениями извлекаются остальные элементы головоломки. Важно не забывать, что для извлечения одного элемента порой требуется правильная последовательность из двух-трех действий.

Язык символов

Пределы математики

В простой логической системе, которой, например, является символическая логика высказываний, существуют символы, которые называются логическими связками и применяются к высказываниям. Например, символ ¬ означает отрицание высказывания. Если высказыванием A является «завтра я иду в кино», то высказыванием ¬A будет «завтра я не иду в кино». Еще одним примером связки является символ ∧, называемый конъюнкцией; он означает «и». Если дано высказывание B «завтра я останусь дома», то связка ∧ работает следующим образом. Запись A∧¬B означает: «завтра я пойду в кино и не останусь дома». Все эти символы подчиняются правилам, которые описываются так называемыми таблицами истинности, где указываются значения логических связок для всех возможных значений исходных высказываний. И и Л — истина и ложь соответственно. В соответствии с этим таблица для связки ¬, которая является наиболее простой, выглядит так:

▲ В одной из своих самых известных работ «Великий архитектор» (The ancient of days) британский поэт, художник и мистик Уильям Блейк изобразил сурового Бога, механически чертящего линии, символизирующие законы и ограничения. Полтора столетия спустя Гёдель окончательно показал всему человечеству, что всю сложность окружающего нас мира невозможно описать посредством дедукции.

A	¬A
И	Л
Л	И

Таблица истинности для конъюнкции выглядит так:

A	B	A∧B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Хотя существуют и другие логические связки с соответствующими таблицами истинности, здесь интерес представляет тот факт, что определен целый ряд правил, описывающих логическую систему. Также существуют и другие символы, называемые кванторами, точное определение которых довольно непросто для понимания, однако общий смысл вполне доступен. В контексте нашего обсуждения кванторы можно понимать как стенографические знаки. Квантором является, например, знак ∀, означающий «для любого», или знак ∃, означающий «существует».

Таким образом, в контексте нашего обсуждения сформулировать предложение или теорему означает определить ряд высказываний, о которых точно известно, истинными или ложными они являются, и посредством так называемого логического вывода (то есть с помощью правил, подобных описанным выше) прийти к результату, о котором также можно будет однозначно сказать, истинный он или ложный. Такова суть метода, использованного в знаменитых «Началах» Евклида. В качестве исходных утверждений Евклид взял аксиомы, или постулаты (высказывания), которые считались истинными, затем посредством логического вывода, подчиняющегося правилам, определенным в таблицах истинности, сформулировал ряд теорем геометрии.

Множество высказываний, выбранных в качестве исходных, составляет аксиоматику геометрии. Также существует аксиоматика арифметики и аксиоматика теории множеств.

► На этом египетском папирусе, датируемом I веком, приведен фрагмент одной из древнейших известных нам версий «Начал» Евклида — создателя аксиоматического метода.

Математика, выстраивающая себя сама

Логическая система, подобная той, которую мы только что описали, является несколько механической в том смысле, что все операции с высказываниями выполняются по строгим правилам. Говоря простыми словами (пусть это будет несколько некорректно), при выполнении действий важно быть осторожным, но думать при этом не нужно. Может показаться, что геометрические теоремы можно создавать исключительно с помощью логики, не думая о прямых и плоскостях и не представляя, как они пересекаются в пространстве. Более того, можно предположить, что достаточно повернуть ручку некоего устройства и автоматически создать все возможные теоремы геометрии. Если бы это было возможно, то математика стала бы не просто точной, но совершенной наукой, наукой всех наук.

Более двух тысяч лет аксиоматический метод геометрии давал прекрасные результаты. На основе всего нескольких аксиом можно было доказать бесконечное множество теорем. Казалось разумным полагать, что этот же метод можно применить и в других областях. К концу XIX века в арифметике была определена аксиоматика, которая казалась столь же полной, что и аксиоматика геометрии. После определения аксиом арифметики из них можно было вывести ряд предложений, которые обретали статус теорем. Именно эту цель преследовал Давид Гильберт. Тем не менее, теорема Гёделя о неполноте стала своеобразной торпедой, которая потопила проект Гильберта.

▲ *Раймунд Луллий считал, что придумал непогрешимый и универсальный метод создания истинных высказываний о мире путем механического манипулирования базовыми понятиями. В его «искусстве поиска истины» использовались сложные схематичные отношения между фундаментальными свойствами (см. рис.), и его можно считать необычным прообразом формализма Гильберта.*

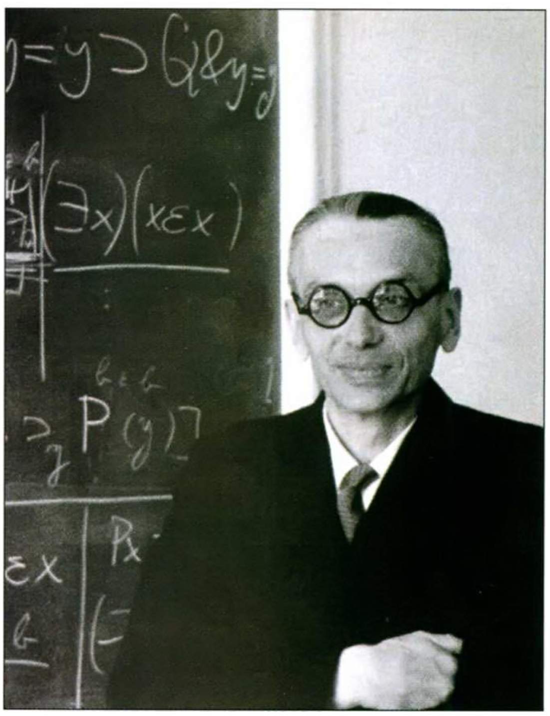
Непротиворечивость и полнота формальных систем

Любая теория образована множеством аксиом и правил логики, позволяющих получить ряд выводов или теорем на основе этих аксиом. Говорят, что теория является противоречивой, когда в ее рамках можно показать, что некое утверждение и противоположное ему являются истинными одновременно. С другой стороны, в рамках данной теории должна существовать возможность доказать любое истинное утверждение. Если такая возможность существует, то теория называется полной.

Теоремы Гёделя

Гёдель в действительности доказал две теоремы. Первая, известная как теорема о неполноте, гласит, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула. Иными словами, если теория непротиворечива, то она обязательно является неполной. Эта теорема означает, что не может существовать идеальная система аксиом, описывающая арифметику натуральных чисел: любая подобная система будет либо неполной, либо противоречивой.

▼ *Австрийский математик и логик Курт Гёдель положил конец попыткам Гильберта определить математику как чисто формальную систему, доказав, что аксиоматическая система минимальной сложности не может полностью описывать сама себя непротиворечивым образом.*



◄ *Некоторые теоретики увидели в теореме Гёделя о неполноте непреодолимое препятствие для создания искусственного интеллекта, указав, что естественные языки также описывают сами себя. На иллюстрации изображен робот последнего поколения по имени Qrio, созданный японской компанией Sony.*

▲ *Canon per Tonos («Тональный канон») из «Музыкального приношения» Иоганна Себастьяна Баха (1685–1750) содержит прекрасный пример бесконечного цикла, так как после окончания он начинается снова, но уже на тон выше, и так далее, практически до бесконечности, если того пожелает исполнитель.*

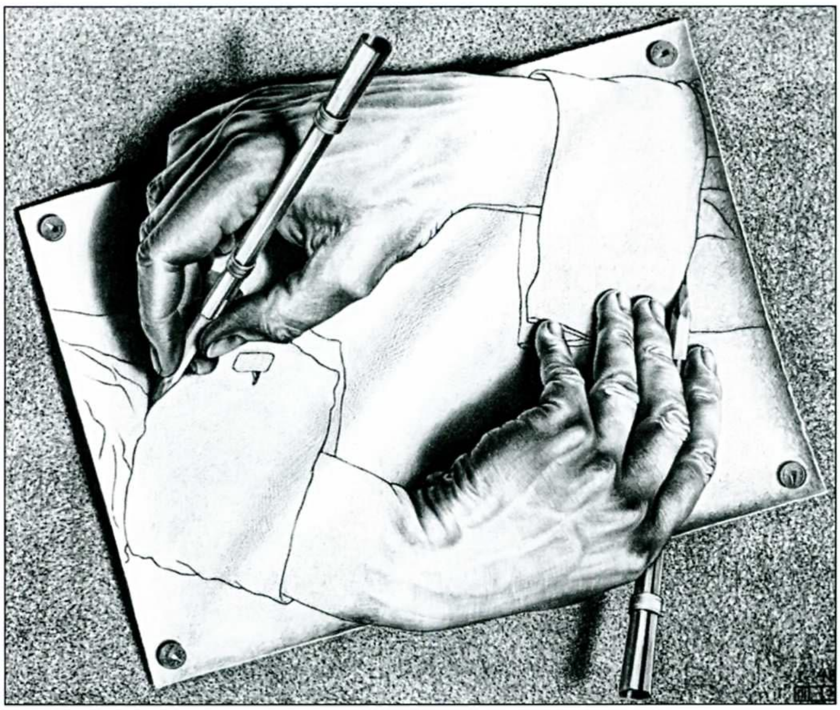
Вторая теорема Гёделя гласит, что если формальная арифметика непротиворечива, то в рамках этой арифметики нельзя вывести доказательство того, что это и в самом деле так. Эта теорема несколько более запутана, чем первая. Ее следствием является тот факт, что теория, описывающая арифметику натуральных чисел, не может логически обосновывать сама себя, то есть в ней нельзя доказать утверждение вида «Теория Т является непротиворечивой». Эта теория будет обладать определенным формальным символизмом, в рамках которого может содержаться утверждение «Теория Т является непротиворечивой», обозначенное символом, например С (Т). Теорема Гёделя гласит, что если Т — непротиворечивая система, то С (Т) нельзя доказать в рамках Т.

Парадоксы самоотносимости

Мы не ставили перед собой цели привести полное объяснение теоремы Гёделя в том числе и потому, что исходное доказательство нельзя понять, не располагая обширными математическими знаниями. Заметим, что после публикации теоремы едва ли десять специалистов во всем мире обладали необходимыми знаниями, чтобы детально проследить за ходом ее доказательства. Мы попытаемся объяснить суть этой теоремы, которая тесно связана с парадоксами, неизменно привлекавшими внимание Гёделя, а именно парадоксами самоотносимости.

Классическим примером подобных парадоксов является так называемый парадокс лжеца. Некий человек говорит нам: «Я лгу». Определить, правду ли говорит этот человек, нельзя: если он лжет, то его фраза будет истинной, а если он говорит правду, то его фраза в этом случае будет ложной. Парадокс возникает из-за того, что его формулировка содержит отсылку к самой себе (если оперировать терминами информатики, можно сказать, что она содержит цикл).

▼ *В своих работах, например в картине «Рисующие руки» (1948), голландский художник Мауриц Корнелис Эшер как никто другой выразил огромную, возможно непостижимую сложность самоотносимых процессов.*



Грубо говоря, именно эту стратегию использовал Гёдель для доказательства теоремы о неполноте: ему удалось показать существование подобного бесконечного цикла в самой арифметике, в том числе в методе математической индукции.

Числа Гёделя

Логическая теория чисел содержит единственную константу 0 и единственную функцию s (она называется функцией следования), которая определяется элементарно: $s(0) = 1$, что означает «следующее за нулем число — единица», $s(s(0)) = 2$ и так далее. Кроме того, даны знаки ¬, ∧, (,), s и т. д., которые составляют алфавит формального языка. Каждому из этих знаков присваивается число в соответствии с таблицей:

Знак	Значение	число
¬	отрицание	1
∧	конъюнкция	2
→	следствие	3
∃	существует	4
=	равно	5
0	ноль	6
s	следующее	7
(	открывающая скобка	8
)	закрывающая скобка	9
X	числовая переменная	10
Y	числовая переменная	11
Z	числовая переменная	12

Как и в любом другом формальном языке, с помощью этих знаков можно записывать высказывания. Например, высказывание «для 0 существует следующее число» записывается так:

$$(\exists x)\ (x = s\ (0)),$$

то есть «существует число x такое, что оно является следующим для 0». Теперь запишем это утверждение, заменив знаки числами так, как показано в таблице:

8 4 10 9 8 10 5 7 8 6 9 9.

Далее используем эти числа как показатели степени. Основаниями степени будут последовательные простые числа 2, 3, 5, 7, 11, ...

$$2^{8}\cdot3^{4}\cdot5^{10}\cdot7^{9}\cdot11^{8}\cdot13^{10}\cdot17^{5}\cdot19^{7}\cdot23^{8}\cdot29^{6}\cdot31^{9}\cdot37^{9}.$$

◄ *Картина под названием «Вероломство образов» (надпись на картине: «Это не трубка») бельгийского художника Рене Магритта (1898–1967), датируемая 1929 годом, напоминает нам, что изображение трубки является не объектом, а лишь его представлением. Следовательно, эта фраза также является представлением, но представлением чего? Здесь мы вновь сталкиваемся с бесконечным циклом.*

Это и есть число Гёделя. Не будем вдаваться в тонкости присвоения чисел операциям столь сложным способом. Важно другое: в формальной логической системе, в которой определена аксиоматика арифметики, любому утверждению соответствует единственное число. Согласно аналогичному правилу, числа можно присваивать доказательствам и теоремам. Если двум доказательствам, аксиомам или теоремам соответствует одно и то же число, то они эквивалентны.

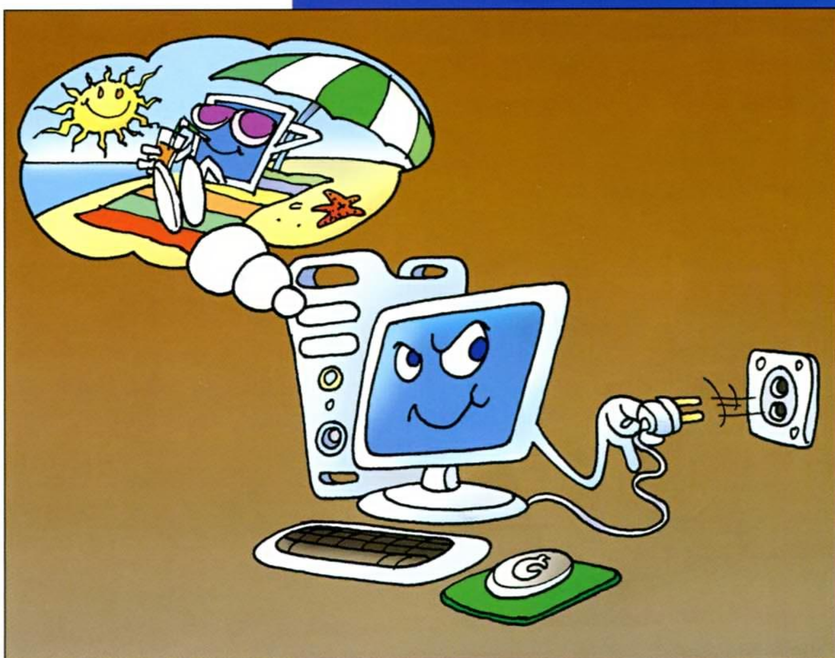
Гёдель составил высказывание вида «Е недоказуемо», которому поставил в соответствие число и которое в рамках аксиоматики чисел содержало ссылку на само себя (подобно парадоксу лжеца). Затем (здесь начинается сложная часть доказательства) он показал, что это высказывание является неразрешимым в том смысле, что и Е, и отрицание Е недоказуемы. На основе этого Гёдель заключал, что в аксиоматике арифметики существуют недоказуемые утверждения.

Гильберт отнесся к следствиям теоремы Гёделя с некоторым пессимизмом: он возлагал большие надежды на формирование основ математики таким образом, чтобы она, образно говоря, «выстраивала сама себя» и сложные результаты можно было бы получать исходя из простых высказываний в рамках согласованной логической системы. Гёдель не разделял подобного пессимизма: он не считал, что его теорема о неполноте подразумевает, что аксиоматический метод непригоден для теоретического развития математики. Напротив, он полагал, что теорема о неполноте всего лишь влияет на образ рассуждений в математике, возвращая интуиции главную роль, которую, по его мнению, она должна играть в математике.

Эта точка зрения полностью соответствовала его философским взглядам, которые были ближе к учению Платона, чем к логическому позитивизму. В некотором роде можно сказать, что теоремы Гёделя отодвинули на второй план механистичность и «точность» математики и придали определяющее значение воображению и интуиции. Тем самым математика оказалась причисленной к гуманитарным наукам наряду с философией и музыкой.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- К настоящему времени теории Гёделя обобщены и применяются во множестве различных областей. Одной из сфер, в которой теории Гёделя нашли непосредственное применение, является информатика, особенно ее часть, касающаяся неразрешимости проблемы остановки. Эта проблема заключается в том, что при заданном описании алгоритма и входных данных нужно определить, завершится выполнение алгоритма с этими данными или же он будет выполняться бесконечно.



- Еще одно важное следствие теоремы Гёделя, относящееся к информатике, в частности к компьютерам, касается вирусов. Теорема Гёделя позволяет доказать: никакая программа, которая не изменяет оперативную память компьютера, не сможет выявить все программы, которые изменяют память компьютера (как, собственно, и работают компьютерные вирусы).

◄ *Давид Гильберт (на иллюстрации приведена фотография 1886 года) с пессимизмом отнесся к следствиям теоремы Гёделя, так как был убежден, что они нанесли окончательный удар по его попыткам определить математику как полностью формальную систему.*

Существуют различные премии, вручаемые как математикам первой величины, так и студентам всего мира в знак признания их заслуг. Среди этих наград особое место занимают Филдсовская и Абелевская премии.

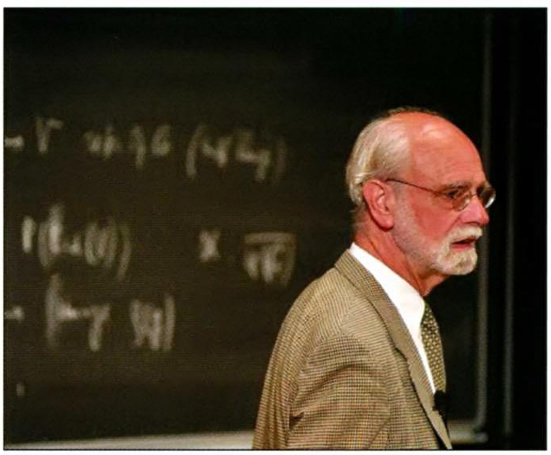
Награда лучшим
Математические премии

Существует множество версий того, почему не вручается и никогда не вручалась Нобелевская премия по математике. Согласно наиболее правдоподобной, в то время когда Нобелевская премия только создавалась, уже существовала Скандинавская премия по математике, учрежденная королем Норвегии. Возможно, Нобель не хотел вступать с ним в соперничество. Кроме того, возможно, Альфред Нобель не видел, какой вклад могут внести математики в жизнь общества — в конце концов, именно по этому критерию изобретатель динамита планировал выбирать лауреатов учрежденной им премии.

▲▼ Филдсовская премия, самая престижная математическая премия мира, компенсирует отсутствие Нобелевской премии по этой дисциплине. Она была названа в честь своего учредителя — канадского математика Джона Чарльза Филдса (1863–1932).

Филдсовская премия

Чтобы заполнить этот пробел, математики учредили собственную награду — Филдсовскую премию, названную в честь канадского математика Джона Чарльза Филдса (1863–1932), который, будучи президентом VII Международного математического конгресса, проходившего в Торонто в 1924 году, предложил учредить международную математическую премию из пожертвованных им средств. Начиная с 1936 года раз в четыре года среди математиков всего мира выбираются двое лауреатов, удостаиваемых золотых медалей «за выдающиеся открытия в математике». В 1966 году число медалей было увеличено до четырех.



◄ Труды британского математика Дэвида Мамфорда о проблемах, связанных с существованием различных многообразий и их структурой, были отмечены Филдсовской премией на международном конгрессе в Ванкувере в 1974 году.

Лауреаты Филдсовской премии (1936–2006)

Год	Лауреаты
1936	Ларс Альфорс, Джесси Дуглас
1950	Лоран-Моиз Шварц, Атле Сельберг
1954	Кунихико Кодайра, Жан-Пьер Серр
1958	Клаус Рот, Рене Том
1962	Ларс Хёрмандер, Джон Милнор
1966	Майкл Атья, Пол Коэн, Александр Гротендик, Стивен Смэйл
1970	Алан Бейкер, Хэйсукэ Хиронака, Сергей Петрович Новиков, Джон Томпсон
1974	Энрико Бомбиери, Дэвид Мамфорд
1978	Пьер Делинь, Чарльз Фефферман, Григорий Александрович Маргулис, Даниель Квиллен
1982	Ален Конн, Уильям Тёрстон, Яу Шинтан
1986	Саймон Дональдсон, Герд Фальтингс, Майкл Фридман
1990	Владимир Гершонович Дринфельд, Вон Джонс, Сигэфуми Мори, Эдвард Виттен
1994	Ефим Исаакович Зельманов, Пьер-Луи Лионс, Жан Бурген, Жан-Кристоф Йокко
1998	Ричард Борчердс, Уильям Гауэрс, Максим Львович Концевич, Кёртис Макмуллен
2002	Лоран Лаффорг, Владимир Александрович Воеводский
2006	Григорий Яковлевич Перельман, Андрей Юрьевич Окуньков, Теренс Тао, Венделин Вернер

◄ *Этот четырехметровый памятник, установленный на гранитном постаменте в восемь метров высотой, был воздвигнут в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. Церемония открытия прошла 17 октября 1908 года в саду королевского дворца Осло, который теперь называют садом Абеля.*

◄ *Его Величество король Норвегии Харальд V (справа) вручает Абелевскую премию математикам Изадору Зингеру (слева) и сэру Майклу Атья (в центре). Оба были удостоены этой престижной премии за открытие и последующее доказательство так называемой теоремы об индексе.*

Существует правило, согласно которому премия не вручается математикам старше 40 лет, поэтому, к примеру, Джон Нэш и Эндрю Уайлс оказались за пределами списков награжденных. (Тем не менее, Уайлс был удостоен «особой премии» на церемонии 1998 года.) Помимо медали также вручается определенная, чисто символическая сумма наличными.

Чтобы компенсировать отсутствие Нобелевской премии по математике, премьер-министр Норвегии Йенс Столтенберг 23 августа 2001 года пусть с некоторым опозданием, но объявил о создании фонда размером в 200 миллионов норвежских крон (около 23 миллионов долларов) для учреждения международной ежегодно вручаемой Абелевской премии по математике, названной в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802–1829).

В 2003 году Норвежская академия наук огласила имя первого лауреата Абелевской премии. Им стал французский математик Жан-Пьер Серр, удостоенный награды «за ключевую роль в придании современной формы многим отраслям математики, включая топологию, алгебраическую геометрию и теорию чисел». Этот блестящий математик, родившийся в 1926 году в поселке Баж на юге Франции, ранее уже был удостоен престижной Филдсовской премии в возрасте всего 27 лет за работы по спектральным последовательностям и проблеме расслоения. Обладателем Филдсовской премии также был и второй лауреат Абелевской премии, британский математик сэр Майкл Атья, который совместно с американцем Изадором Зингером был отмечен «...за открытие и доказательство теоремы об индексе, соединившей топологию, геометрию и анализ, и за выдающуюся роль в наведении новых мостов между математикой и теоретической физикой».

Задачи тысячелетия

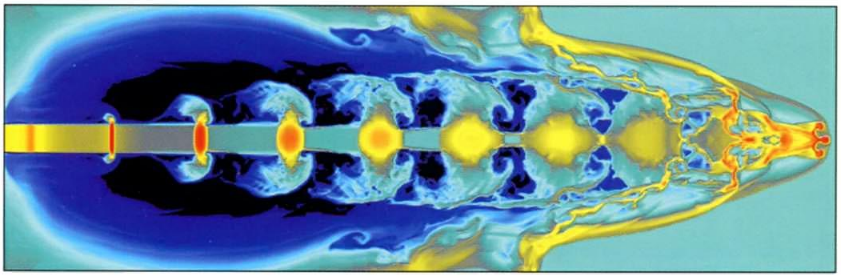
Математический институт Клэя (CMI) — это частная некоммерческая организация, созданная бостонским предпринимателем и мультимиллионером Лэндоном Клэем, штаб-квартира которой располагается в Кембридже, штат Массачусетс. Целью создания организации было развитие и популяризация математики. В ее экспертный комитет входят такие крупные математики, как Эндрю Уайлс, который в 1995 году доказал теорему Ферма, Ален Конн, Эдвард Виттен и Артур Яффе. Институт Клэя курирует множество программ, начиная от анализа преподавания математики в школах и заканчивая выплатой стипендий исследователям. 25 мая 2000 года Институтом Клэя было объявлено о создании списка «Задачи тысячелетия» из семи крайне важных математических задач, за решение каждой из которых полагался приз в один миллион долларов.

Право на приз имеет любой — не существует ограничений ни по возрасту, ни по ученой степени. Учитывая огромную сложность этих задач, финансовые консультанты господина Клэя наверняка всерьез сомневались, что Институт когда-либо выплатит все семь миллионов. Тем не менее, в 2004 году российский математик Григорий Перельман заявил, что нашел решение седьмой задачи из списка (доказательство гипотезы Пуанкаре), но, к счастью для финансовых консультантов, отказался принять награду...

◄ *Французский математик Жан-Пьер Серр был награжден Абелевской премией в 2003 году в знак признания его ключевой роли в придании современной формы многим отраслям математики.*

ученых, награжденных этой премией, — настоящие легенды: французские математики Анри Картан и Андре Вейль, советский математик Андрей Николаевич Колмогоров и американский математик польского происхождения Самуэль Эйленберг.

	Задачи тысячелетия
1	Равенство классов **P** и **NP**.
2	Гипотеза Римана.
3	Теория Янга — Миллса.
4	Существование и гладкость решений уравнений Навье — Стокса.
5	Гипотеза Бёрча — Свиннертон-Дайера.
6	Гипотеза Ходжа.
7	Гипотеза Пуанкаре.



▼ *Одна из важнейших областей применения численных моделей — изучение турбулентности с помощью уравнений Навье — Стокса. На иллюстрации изображены потоки материи, испускаемые протозвездами. Это изображение высокого разрешения получено с помощью космического телескопа «Хаббл».*

Математические олимпиады

Математические олимпиады согласно регламенту — это «состязания учащейся молодежи, главной целью которых является стимулирование изучения математики и поддержка молодых талантов в этой области». Математические олимпиады берут начало от национального конкурса Этвёша, прошедшего в Венгрии в 1894 году. Право называться олимпиадами эти математические конкурсы получили в 1958 году, когда по инициативе Румынии было принято решение о проведении первой Международной математической олимпиады. В первой олимпиаде, прошедшей в Румынии в 1959 году, приняли участие команды из семи стран. В настоящее время в списке участников — команды из 80 стран с пяти континентов.

▲ *В национальных математических олимпиадах участвуют школьники, показавшие наиболее выдающиеся результаты в изучении математики. В ходе трех этапов Олимпиады участники должны решить множество разнообразных задач высокой сложности. На фотографии — участники Австралийской математической олимпиады 2003 года.*

В олимпиаде может участвовать любой школьник младше 19 лет. Олимпиада проходит в три этапа. Первый этап, который проводится на уровне регионов и областей, состоит из двух туров, где нужно решить в общей сложности восемь задач. Трое участников, набравших наивысший балл, переходят на следующий этап. На втором этапе, проходящем на уровне стран, в течение двух туров продолжительностью 4,5 часа каждый, участники должны решить в общей сложности шесть задач. Шестеро лучших получают право участвовать в последнем, международном этапе, который обычно проводится в середине июля и также состоит из двух туров продолжительностью 4,5 часа каждый, где нужно привести письменное решение в общей сложности шести задач.

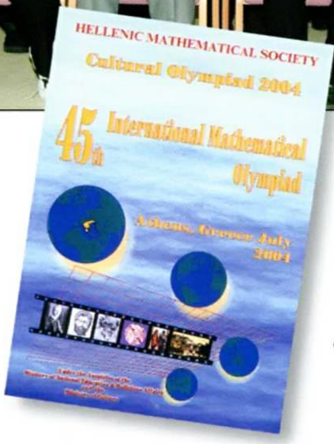
Другие математические премии: премия Неванлинны и премия Вольфа

В 1981 году Международный математический союз учредил премию Рольфа Неванлинны, которая вручается раз в четыре года за выдающиеся достижения в области информатики и вычислительной математики. Одной из причин учреждения премии стал рост важности задач, связанных с информатикой и вычислениями, среди которых отметим уже упоминавшуюся задачу о равенстве классов P и NP, относящуюся к проверке результатов сложных вычислительных задач за полиномиальное время. Среди награжденных выделяются израильский математик Роберт Тарьян и американский математик Питер Шор, один из создателей квантовых вычислений.

Еще одной важной премией является премия Вольфа, которая с 1978 года ежегодно вручается одноименным израильским фондом. Хотя эта премия имеет несколько номинаций, относящихся как к науке, так и к искусству, наиболее престижна премия Вольфа по математике. Среди

► *Питер Шор в 1994 году доказал, что если задача о построении квантового компьютера будет решена, то с его помощью можно будет раскладывать любое большое число на простые множители намного быстрее, чем с помощью обычных компьютеров, что позволит взломать алгоритм шифрования RSA. В 1998 году*

Питер Шор был удостоен премии Неванлинны.



▲ *По результатам национальных этапов международной математической олимпиады победителям вручаются призы. На фотографии — победители Японской математической олимпиады 2002 года.*

◀ *На иллюстрации приведена афиша Международной математической олимпиады, прошедшей в Афинах в 2004 году.*

По результатам последнего этапа определяются три победителя, которым вручаются золотая, серебряная и бронзовая медали. Место проведения заключительного этапа олимпиады ежегодно меняется. Так, финал международной математической олимпиады 2008 года, в котором приняли участие 97 человек, прошел в Мадриде.

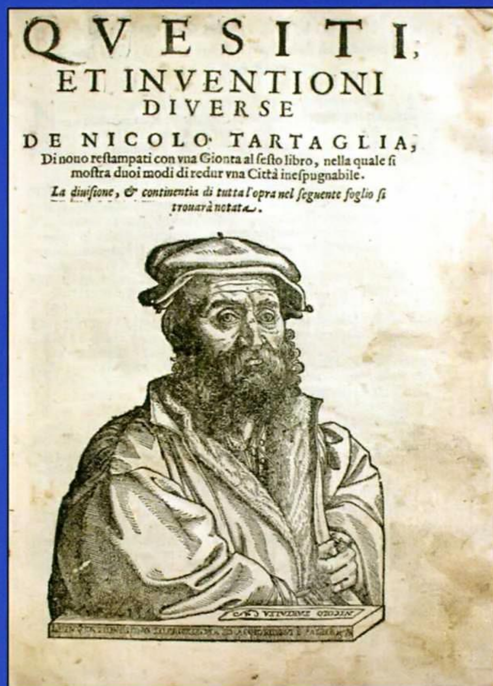
Первые места в олимпиадах традиционно занимают школьники из России, США, Болгарии и Южной Кореи.

▶ *Тарталья (на иллюстрации изображена страница одной из его работ с его же портретом) в ходе 12-часового поединка с Фьоре решил все предложенные задачи, в то время как его оппоненту не удалось справиться ни с одной.*

Дисциплины, составляющие программу математических олимпиад
Теория чисел, включая основные теоремы арифметики, линейные и квадратичные диофантовы уравнения, модулярная арифметика, теоремы Ферма и Эйлера.
Алгебра, включая основные теоремы алгебры (в частности, неравенства, представление многочлена в виде произведения неприводимых многочленов, многочлены, симметричные относительно нескольких переменных, теорема Виета).
Комбинаторика, в том числе теория графов.
Геометрия, включая свойства ортоцентров, прямую Эйлера, прямую Симпсона, неравенство Птолемея и т. д.
Ранее в программу олимпиад также входили следующие темы: комплексные числа, конструктивная блочная геометрия.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Современные математические премии, возможно, берут начало в Италии XVI века, в особенности в Венеции, где проводились популярные математические турниры, призом за победу в которых была денежная сумма или приглашение на званый обед. Победителем признавался тот, кто точнее и быстрее всех решал определенную математическую задачу. Итальянский математик Тарталья обрел широкую популярность, когда его вызвал на поединок Фьоре. Каждый участник состязания должен был внести определенную сумму денег в присутствии нотариуса и предложить своему оппоненту ряд задач. Тот, кому за 30 дней удавалось решить больше задач, забирал банк. Победу в этом состязании одержал Тарталья.


QVESITI, ET INVENTIONI DIVERSE DE NICOLO TARTAGLIA,

Di nouo restampati con vna Gionta al sesto libro, nella quale si mostra duoi modi di redur vna Città inespugnabile.

La diuisione, & continentia di tutta l'opra nel seguente foglio si trouarà notata.

- Существует эквивалент международной математической олимпиады для самых маленьких — конкурс «Кенгуру», в котором могут участвовать ученики 2–10 классов. Этот конкурс, который проводится во всех европейских странах, проходит в мае во всех странах-участницах в один и тот же день и час. В последнем конкурсе участвовало свыше трех миллионов школьников, благодаря чему он занял первое место среди всех конкурсов мира по числу участников.

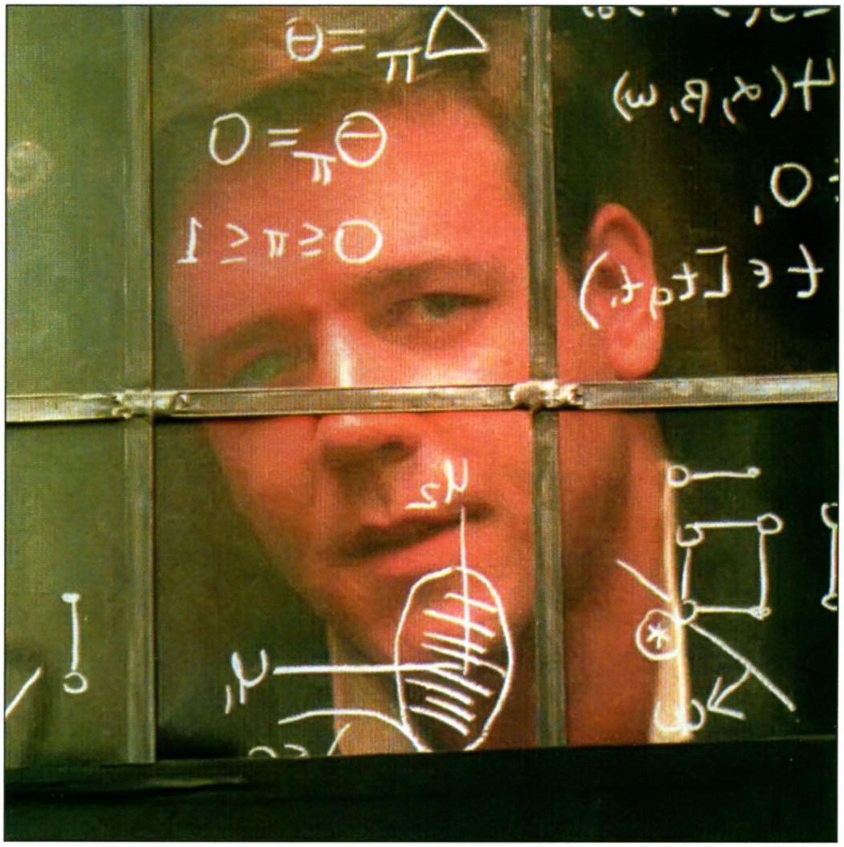
Игры разума
Джон Форбс Нэш

В конце 1994 года американская журналистка Сильвия Назар опубликовала в газете New York Times статью под названием «Последние дни Нобелевской премии», посвященную жизни Джона Форбса Нэша и его жены. Статья привлекла большой интерес читателей, и Сильвия решила написать биографическую книгу о Нэше под названием «Прекрасный ум», по которой впоследствии был снят фильм «Игры разума». Авторы сценария взяли свыше тысячи интервью и отправили несколько сотен писем тем, кто был знаком с Нэшем. Из этого фильма, главную роль в котором сыграл Рассел Кроу, широкая публика узнала о радостях и огорчениях, пережитых гениальным математиком, страдавшим от психического расстройства.

Нэш родился в 1928 году в городе Блюфилд в штате Западная Виргиния, США. Он рано продемонстрировал талант к математике и стал одним из десяти учеников своего выпуска, получавших стипендию, которая давала право обучаться в Политехническом институте Карнеги. Сначала Нэш занимался химией и инженерным делом, но затем отдал предпочтение своему истинному призванию — математике. Он продолжил обучение в Принстонском университете, где завоевал уважение соперников по настольной игре, которая спустя несколько лет была выпущена на рынок под названием «Гекс».

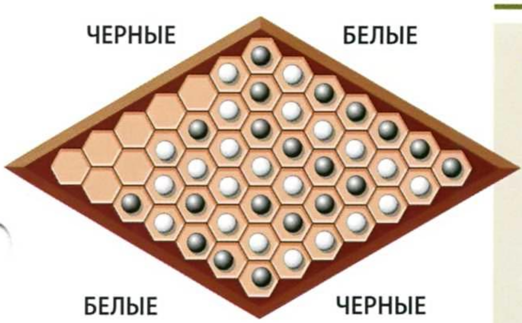
Секрет игр

Увлечение Нэша играми оказало влияние на проводимые им исследования. В 1950-е годы теория игр стала одним из наиболее популярных разделов математики. Нэш сыграл главную роль в первом экспериментальном исследовании так называемой дилеммы заключенного, затем занялся изучением игр с нулевой суммой, или некооперативных игр, в которых игроки преследуют прямо противоположные цели. Одним из важнейших его открытий стало так называемое равновесие Нэша, которое легло в основу новой экономической теории. За это открытие Нэш был удостоен Нобелевской премии по экономике 1994 года.



▲ *Актер Рассел Кроу в эпизоде фильма «Игры разума». За роль Джона Нэша Кроу был удостоен премии «Оскар».*

Равновесие Нэша обозначает ситуацию, в которой обе противоборствующие стороны согласны с ситуацией, сложившейся в игре или на



«Гекс»

Эта настольная игра, принесшая популярность Нэшу в Принстонском университете, состоит из ромбовидной доски, разбитой на шестиугольные клетки. Чаще используется доска размером 11 × 11 клеток; другие популярные размеры — 14 × 14 и 19 × 19.

Один участник играет белыми, другой — черными. Каждый игрок по очереди располагает на доске фишки своего цвета. Цель — составить цепочку фишек, соединяющую противоположные стороны доски. Эту игру Джон Нэш изобрел в 1948 году, а несколькими годами ранее совершенно независимо от него ее придумал Пит Хейн. Игра была выпущена на рынок в 1952 году под названием «Гекс».

Дилемма заключенного

Дилемма заключенного формулируется так: двое преступников А и В обвиняются в совершении преступления. Их допрашивают по отдельности и предлагают следующие условия: если никто из них не признается, оба отправятся за решетку на год. Если один из них признается, а другой нет, то первый выйдет на свободу, а второй будет осужден на шесть лет. Если признаются оба, то каждый получит срок в три года тюрьмы. Все возможные ситуации представлены в таблице.

ДИЛЕММА ЗАКЛЮЧЕННОГО			
		Тюремный срок для заключенного В	
		не признался	признался
Тюремный срок для заключенного А	не признался	A = 1 B = 1	A = 6 B = 0
	признался	A = 0 B = 6	A = 3 B = 3

Существует самостоятельный раздел математики, посвященный изучению подобных ситуаций, которые рассматриваются как стратегические игры. Игра описывается таблицей чисел, которая порой может быть очень сложной, а стратегиями являются возможные оптимальные «ходы» игроков. Если руководствоваться исключительно доводами разума, анализировать так называемое математическое ожидание и использовать методы алгебры и теории вероятностей, то получим следующий вывод: в целом будет лучше, если каждый игрок не будет действовать эгоистично. Действие, которое кажется благоприятным для игрока, может оказаться не столь выгодным, если принять во внимание возможные действия других игроков. Так, во многих случаях оптимальная ситуация складывается, когда игроки сотрудничают. Таким образом, все они получают максимально возможную выгоду, а негативные последствия оказываются минимальными. В дилемме заключенного оба игрока, как правило, доносят на другого вместо того, чтобы признаться самим (и с точки зрения математики они ошибаются).

Создатель теории игр Джон фон Нейман применил разработанные им методы для анализа ситуации, сложившейся вокруг ядерного разоружения, и показал ее любопытное сходство с дилеммой заключенного. Нэш расширил теорию фон Неймана на произвольное число игроков. Полученные им выводы применимы к играм любого типа, в особенности к экономическим играм, а также к играм, описывающим конфликты между людьми.

▲ *Обложка книги «Прекрасный ум».*

переговорах, изменение которой окажется невыгодным для обеих сторон. На этом этапе «игры» ни один из игроков не желает менять выбранную им стратегию при условии, что действия его оппонента определены.

Кооперативные игры

Кооперативные игры — это игры, участники которых стремятся достичь общей цели, например выиграть выборы, улучшить управление предприятием или повысить его доход. Непременной особенностью кооперативных игр является сотрудничество между игроками. Противоположная ситуация складывается в так называемых некооперативных играх, где определяющую роль играют индивидуальные стратегии игроков. Ярким примером подобных игр являются так называемые военные игры. Во время холодной войны сложилось неустойчивое равновесие между двумя ведущими мировыми державами — СССР и США. Эту ситуацию можно представить как некооперативную игру, где каждая из сторон придерживается своей стратегии. Было очевидно, что действия сторон могут иметь фатальные последствия для них обеих, что привело к подписанию соглашений о нераспространении ядерного оружия. Примером кооперативных игр могут также служить настольные ролевые игры, которые напоминают театральную постановку. Участники играют роли вымышленных персонажей, следуя указаниям рассказчика (мастера игры), однако могут совершать любые действия, которые соответствуют их роли. Всем известная игра домино является некооперативной, однако парное домино — кооперативная игра.

Опасная игра

В период жизни, который должен был стать наиболее продуктивным, у Нэша начало развиваться психическое расстройство. По его словам, заболевание помешало ему завоевать Филдсовскую премию — самую престижную международную математическую награду. Начинающаяся шизофрения заставила его поверить в то, что он герой, благодаря знаниям криптографии спасающий свою страну от заговора коммунистов. После нескольких курсов лечения в психиатрических клиниках, где он подвергся воздействию сильнодействующих препаратов, Нэш решил бороться с болезнью своими силами. Он по-прежнему слышал приказы воображаемых коллег, но не следовал им. В результате Нэшу удалось победить недуг и впоследствии получить Нобелевскую премию.

► *Джон Нэш, уже в преклонном возрасте, излечившийся от болезни, на премьере фильма «Игры разума». Его сопровождает супруга Алисия Лард.*

Компьютер перестал быть только инструментом вычислений и хранения данных, который удивил весь мир, обыграв чемпиона мира по шахматам, и превратился в разумную машину, способную доказывать теоремы.

Электронная математика

Доказательства с помощью компьютера

◄ *Современные калькуляторы, как, например, финансовый калькулятор последнего поколения HP-12, изображенный на иллюстрации, заметно превосходят по вычислительной мощности первые компьютеры.*

Дэвид Мамфорд, лауреат Филдсовской премии 1974 года, как-то сказал: «Несмотря на все преувеличения пропагандистов, математическое сообщество по-прежнему воспринимает компьютеры как агрессоров». С тех пор прошло уже больше 30 лет, и бóльшая часть математического сообщества теперь считает компьютеры весьма ценными помощниками в математических исследованиях.

С момента появления логарифмов математики постоянно искали способы избежать сугубо механических вычислений, которые представляли собой исключительно потерю времени. Они с радостью встретили появление логарифмической линейки, первых арифмометров, позволявших выполнять сложение и вычитание чисел поворотом ручки, и первых компьютеров, способных выполнять вычисления, слишком объемные для человека.

Однако настал момент, когда машины оказались способны смоделировать дедуктивные рассуждения — то, что ранее было свойственно исключительно человеку. Именно тогда у некоторых ученых сложилось мнение, что машины вступили на некую запретную территорию. Была ли эта точка зрения оправданной или же в ученых заговорили предрассудки? Информатика развивается с необычайной быстротой, и всего за несколько лет она способна изменить подходы, формировавшиеся в течение многих веков.

Разумные вычисления

В 1976 году два математика, Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен, удивили математическое сообщество, заявив, что им удалось доказать теорему о четырех красках. (Эта теорема гласит, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты таким образом, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета.) Сюрприз оказался двойным: во-первых, Аппель и Хакен доказали гипотезу, которая сопротивлялась математикам свыше ста лет; во-вторых, доказательство было проведено с помощью компьютера, а именно IBM 370-160, на что ушло свыше 1200 часов машинного времени.

► *Компьютер серии IBM 370 помог Кеннету Аппелю и Вольфгангу Хакену доказать так называемую теорему о четырех красках. Это доказательство стало первым в истории математики, выполненным с помощью компьютера.*

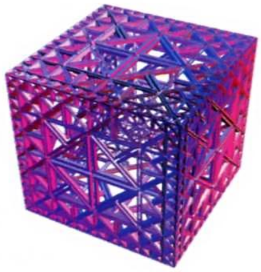
▲ *Математики Вольфганг Хакен (на фотографии) и Кеннет Аппель проанализировали 1900 различных типов карт и подтвердили, что четырех красок достаточно для раскраски любой из них.*

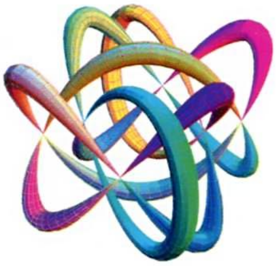
Тринадцать лет спустя на компьютере CRAY была запущена программа, которая по результатам вычислений, длившихся несколько сотен часов, позволила однозначно доказать, что не существует конечной проективной плоскости порядка 10. Для этого компьютер проанализировал все возможные случаи (их насчитывалось приблизительно двести миллиардов). С помощью компьютера удалось доказать уже две теоремы. Надвигались перемены.

Компьютер думает за нас

Автоматические рассуждения — это раздел искусственного интеллекта (ИИ), цель которого — создание компьютерных программ, позволяющих решать математические задачи, в которых используются рассуждения. Цель всех методов автоматических рассуждений, таких как, например, представление знаний, стратегия контроля установленных правил и так далее, — помочь в реализации автоматических рассуждений.

После определения множества аксиом система автоматических рассуждений должна доказать гипотезу, которая является логическим следствием данных аксиом. Существует порядка десяти компьютерных программ, обладающих подобными свойствами. EQP (сокращение от Equational Prover — средство доказательства





◄ *Современные компьютерные программы не только позволяют обрабатывать данные с высокой скоростью, но и делают возможным их наглядное представление.*

эквациональной логики) — одна из самых знаменитых программ автоматического доказательства теорем, поскольку с ее помощью Ларри Уос и Уильям МакКьюн в 1996 году доказали, что всякая алгебра Роббинса является булевой алгеброй. Ранее доказать это утверждение классическими методами не удавалось. Новизна программ этого типа заключается в том, что они не проводят вычисления напрямую, а доказывают утверждения методом от противного.

Занятия математикой

Противники доказательств, выполняемых с помощью компьютера, приводят два основных аргумента, ставящие под сомнение корректность подобных доказательств. Во-первых, эти доказательства не верифицируемы, так как правильность некоторых этапов вычислений никогда не сможет подтвердить ни один математик. Во-вторых, такие доказательства могут содержать ошибки как со стороны программного, так и со стороны аппаратного обеспечения. В большинстве случаев эти ошибки носят случайный характер. Было подсчитано, что вышеупомянутый компьютер CRAY (внизу) может совершить в среднем одну ошибку на каждые 1000 часов работы.

Один из способов преодолеть эти недостатки заключается в реализации различных программ на других компьютерах с последующим сравнением результатов. Как следствие, многие исследователи полагают, что родилась новая математика, которая ближе к эмпирическим и экспериментальным наукам. Однако никто и никогда не утверждал, что математикой следует заниматься только одним четко определенным образом. «Традиционные» математические рассуждения во все времена также были не лишены ошибок. Не раз случалось так, что ошибочный результат в течение многих лет считался правильным. Кроме того, в наши дни математика столь разнообразна и сложна, что проверка корректности теоремы может занять несколько лет или в лучшем случае будет понятна лишь считанному числу узких специалистов. Многие математики в настоящее время полагают, что использование компьютера как средства вычислений и проверки корректности теорем дало начало новой эпохе в математике и, быть может, новой, принципиально иной математике.

▼ *Если мы обозначим все возможные пентамино буквами от A до K и знаком +, то с помощью современных компьютеров сможем наглядно представить все 2339 возможных расположений двенадцати пентамино в прямоугольнике 6 × 10 (некоторые расположения представлены на иллюстрации ниже). Подобные представления полностью очевидны.*

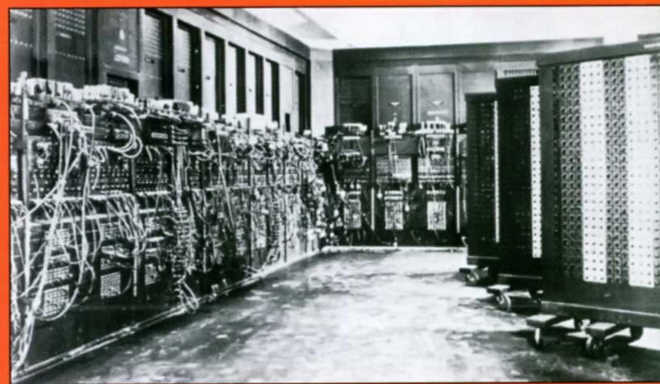
```
HH+CCCDDDE
H+++FCDDEE
HH+FFCKJJE
GGFFIKKKJE
BGGGIIIKJJ
BBBBIAAAAA

HH+DDDBBBB
H+++DDBCCC
HH+FFKKJJC
IGGGFFKKJC
IIIGGFKEJJ
IAAAAAEEEE

HHHAAAAAKK
H+HJJFFKKB
+++JFFDDKB
C+JJFIDDDB
CEEEEIGGBB
CCCEIIIGGG
```

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Компьютер ENIAC работал на протяжении 10 лет, в течение которых провел больше математических вычислений, чем было выполнено до этого за всю историю человечества.



- Эндрю Уайлс доказал великую теорему Ферма без помощи компьютера. Более того, у него не было даже карманного калькулятора. Как-то раз он сказал, что проводит все вычисления вручную, в то же время однозначно дав понять, что он ни в коем случае не является противником компьютеров. Он всего лишь предпочитал работать без компьютера — подобно писателям, которые пишут все произведения от руки, указывая, что таким образом их идеи теснее контактируют с бумагой. Весьма вероятно, что Уайлс принадлежит к этому вымирающему виду математиков.
- Компьютеры могут работать лишь с нулями и единицами. Это накладывает некоторые ограничения, так как при обработке вещественных чисел неизбежно приходится использовать приближенные значения, что может стать причиной ошибки. В 1991 году Дэвид Стаутмайер провел 18 вычислительных экспериментов с компьютерными программами, показав, что во всех случаях результаты вычислений оказывались ошибочными.

Лучшее от Эдуарда Люка
Прогулки строем

Прогулки в колонне

Дети идут в колонне один за другим. Как следует построить детей в колонны, чтобы каждый ребенок стоял рядом со всеми остальными ровно один раз?

Обозначим число детей за n. Во-первых, заметим, что если каждый ребенок должен стоять рядом со всеми остальными, то общее число расположений составит $1/2 \cdot n\ (n-1)$ — таково число сочетаний из n по два. Однако каждый ряд допускает $n-1$ «соседств», следовательно, число возможных колонн равно $1/2 \cdot n$. Таким образом, чтобы задача имела решение, число детей должно быть четным. Чтобы построить детей в колонны, обозначим их буквами, припишем еще одну дополнительную букву и сформируем все возможные последовательности из $n+1$ буквы, затем рассмотрим последовательность, к которой мы добавили букву, и удалим ее. Таким образом мы получим все перестановки, требуемые по условию задачи.

НАБЛЮДЕНИЕ. Каждый ребенок окажется отделен от остальных всего один раз, когда окажется в начале или в конце колонны. Можно удвоить число возможных колонн, построив детей в обратном порядке, однако в этом случае каждый ребенок будет стоять по соседству с каждым из остальных ровно два раза: в первый раз, когда колонна будет идти вперед, во второй — когда колонна будет идти назад.

Прогулки в пансионе

В пансионе проживает четное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами. Как разбить их на пары так, чтобы каждая девушка поочередно прогуливалась со всеми остальными, но не более одного раза?

Допустим, что в пансионе живет 12 девушек, которых мы обозначим буквами алфавита. Разделим окружность (см. рисунок ниже) на 11 равных частей. Расположим в центре одну из букв, L, остальные буквы — в точках, которые делят

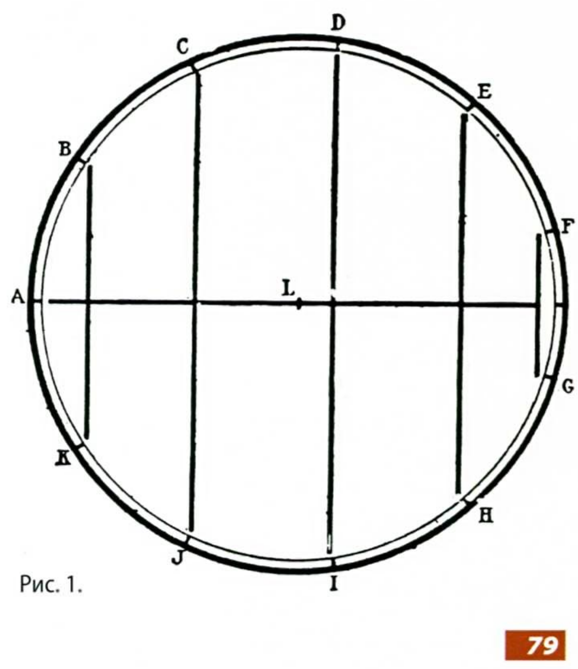


Рис. 1.

окружность на части, произвольным образом. Далее проведем прямые линии так, как показано на рисунке. Объединим девушек в пары для первой прогулки, соединив сначала A с L, затем все остальные буквы параллельными линиями. Таким образом, на первой прогулке состав пар будет выглядеть так:

I. AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Чтобы определить пары для второй прогулки, будем рассматривать множество прямых линий на рисунке как подвижную стрелку, закрепленную в центре, которую мы будем последовательно вращать на одно деление по часовой стрелке, при этом буквы будут оставаться неподвижными. Таким образом мы определим пары для второй прогулки:

II. BL, CA, DK, EJ, FI, GH.

Если мы будем поворачивать стрелку последовательно на одно, два и три деления, получим пары для следующих прогулок:

III. CL, DB, EA, FK, GJ, HI.
IV. DL, EC, FB, GA, HK, IJ.
V. EL, FD, GC, HB, IA, JK

и так далее. Всего мы получим 11 вариантов, в каждом из которых для каждой девушки найдется пара. Теперь осталось показать, что девушки, которые гуляли в одной паре в один из дней, во все остальные дни ни разу не окажутся в одной и той же паре. Для этого нужно рассмотреть два случая: в первом одна из букв, обозначающая девушку, находится в центре окружности, во втором — обе буквы расположены на окружности. Чтобы две буквы, одна из которых находится в центре окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы стрелка прошла через вторую букву ровно один раз — именно так и происходит. Чтобы две буквы, расположенные на окружности, принадлежали к одной паре, необходимо и достаточно, чтобы соединяющая их прямая была перпендикулярна направлению стрелки. Направление стрелки, а следовательно, и направление, перпендикулярное ему, во всех 11 случаях различно.

Головоломка

Задачу о прогулках в пансионе также можно решить с помощью головоломки с кубиками. Пусть A, B, ..., K, L — кубики головоломки, которые обозначают девушек. Будем объединять кубики

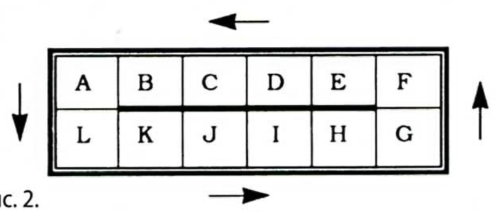


Рис. 2.

в пары по столбцам для каждой прогулки. Для первой прогулки пары будут такими:

AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

Чтобы определить пары для второй прогулки, достаточно удалить кубик L, передвинуть кубик A вниз, сместить на одну позицию влево кубики верхнего горизонтального ряда, передвинуть кубик G вверх, затем сместить на одну позицию вправо все кубики нижнего ряда и, наконец, снова поместить кубик L в пустую клетку так, чтобы он оказался на прежнем месте.

Таким образом мы получим те же пары, что и в решении со стрелкой: метод с головоломкой равносилен тому, что мы будем полагать стрелку на рис. 1 неподвижной и в то же время будем вращать саму окружность на одно, два или три деления относительно стрелки в противоположном направлении. Если же считать все хорды окружности равными и заменить окружность прямоугольником, то мы в точности воспроизведем метод с головоломкой.

Воспитательницы

В двух предыдущих головоломках мы предполагали, что число девушек в пансионе четное, в противном случае задача не имеет решения. Тем не менее, для нечетного числа девушек задачу можно изменить следующим образом.

В пансионе проживает нечетное число девушек, которые каждый день прогуливаются парами, за исключением одной, которая играет роль воспитательницы. Как нужно разбить девушек на пары так, чтобы каждая поочередно прогуливалась со всеми остальными ровно один раз и ровно один раз исполнила роль воспитательницы?

Предположив, что девушек 11, разделим окружность на 11 равных частей и воспроизведем рис. 1 без учета буквы L, расположенной в центре. Будем поворачивать стрелку на одно, два, три деления и так далее. Воспитательницу будет обозначать буква, расположенная на конце стрелки, а все остальные девушки окажутся разбитыми на пары хордами, перпендикулярными стрелке.

Эта задача выводится из задачи о 12 девушках, если исключить из рассмотрения букву L. Для решения этого варианта задачи также можно использовать метод с головоломкой.

НАБЛЮДЕНИЕ. Если записать все пары девушек вне зависимости от того, является их число четным или нечетным, то мы получим полный список всех возможных сочетаний девушек в пары, что нетрудно подтвердить прямыми подсчетами.

После того как вам удастся найти ключ головоломки «Кубы в кубе» и разобрать ее, главная трудность будет в том, чтобы вновь расположить ее элементы в правильном порядке внутри большого куба.

Решение, которое кажется невозможным

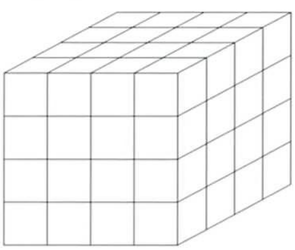
Кубы в кубе

◄ *В головоломке «Кубы в кубе», как и в кубиках сома и кубах Конвея, используются полимино с той лишь разницей, что они заключены внутрь «клетки». Эту головоломку можно отнести к головоломкам со сцепленными блоками («нераспадающимся головоломкам»). И эта головоломка, и головоломки-узлы («Дьявольский крест» и ему подобные) решаются с помощью похожих ходов, однако наша головоломка, строго говоря, не относится к узлам.*

Увидев головоломку «Кубы в кубе» в первый раз, вы можете сказать, что разобрать ее невозможно. Для этого нужно найти первый элемент головоломки, который можно извлечь, — так называемый ключ. Далее путем несложных рассуждений несколькими простыми движениями извлекаются остальные элементы головоломки. Если вам неизвестна последовательность, в которой нужно извлекать элементы головоломки при ее разборке, то «Кубы в кубе» будут представлять для вас немалую сложность. Кроме того, важно не забывать, что для извлечения одного элемента порой требуется правильная последовательность из двух-трех действий.

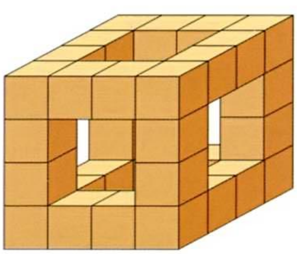
Описание

Головоломка «Кубы в кубе» состоит из семи частей разной формы и «клетки», которая удерживает их вместе, поэтому ее можно назвать еще одним элементом головоломки. Чтобы понять форму и размеры ее элементов, представьте, что каждое ребро большого куба состоит из четырех маленьких кубов, как показано на рисунке.



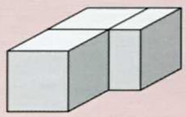
Подсчет кубов

Большой куб состоит из $4 \times 4 \times 4 = 64$ маленьких кубов. Интересно определить, каким образом из этих маленьких кубов составлены семь элементов головоломки и «клетка». Выбрав все маленькие кубики, образующие ребра большого куба, получим «клетку», которая состоит из 32 кубов и по форме напоминает коробку с шестью отверстиями.

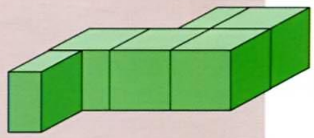


Чтобы закрыть каждое отверстие, нужно 4 куба, всего $4 \times 6 = 24$. Далее остается внутренний куб размерами $2 \times 2 \times 2 = 8$ маленьких кубов. Таким образом, 7 элементов головоломки состоят в общей сложности из 32 маленьких кубов. Элементы головоломки состоят из целых маленьких кубов или их половинок. И кубы, и их половины соединяются между собой целыми гранями, благодаря чему собранная головоломка не содержит пустот.

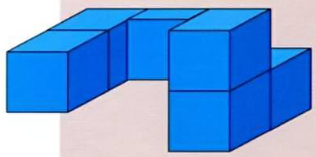
Семь внутренних элементов



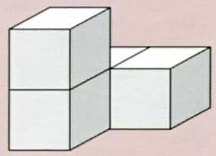
Элемент № 1: состоит из двух кубов и одной половины куба.



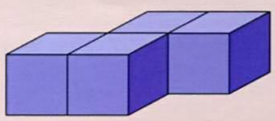
Элемент № 2: состоит из четырех кубов и двух половин.



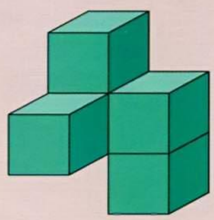
Элемент № 3: состоит из пяти кубов и одной половины.



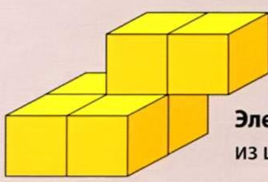
Элемент № 4: состоит из четырех кубов.



Элемент № 5: состоит из четырех кубов.



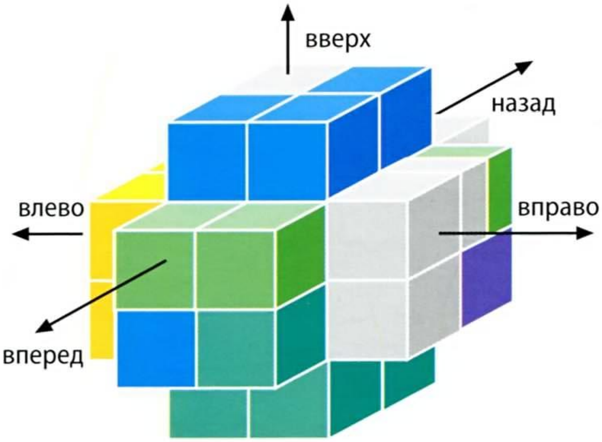
Элемент № 6: состоит из пяти кубов.



Элемент № 7: состоит из шести кубов.

Решение

Сначала мы приведем последовательность движений для разборки головоломки, причем порядок действий соответствует нумерации элементов, приведенной на предыдущей странице. Чтобы вы увидели элементы головоломки более наглядно, мы не изобразили на рисунке «клетку» и указали, в какой последовательности нужно совершать ходы, чтобы извлечь элементы головоломки через соответствующие отверстия. Для сборки головоломки нужно выполнить эти же действия, но в обратной последовательности.

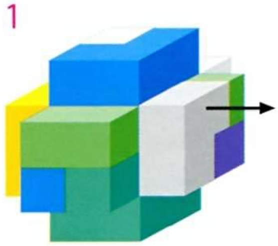


Разборка

Чтобы разобрать головоломку, сначала нужно найти, на какой из шести граней находится ключ, то есть элемент № 1. Чтобы разобрать головоломку, необходимо повернуть ее так, чтобы положение элемента № 1 совпадало с изображенным на рисунке выше, где он представлен в виде буквы Р. На иллюстрации ключ изображен на правой грани куба.

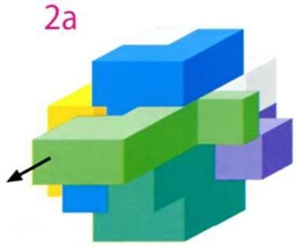
Направления, вдоль которых нужно смещать элементы, показаны стрелками черного цвета. Стрелки красного цвета обозначают направления, вдоль которых извлекаются элементы. Упоминаемые в решении направления (вперед, назад, вверх, вправо и влево) отмечены на рисунке слева.

1



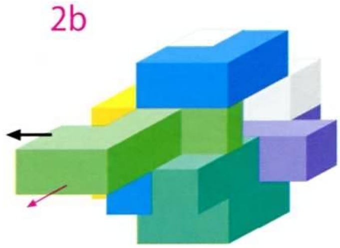
Ключ извлекается одним движением.

2a



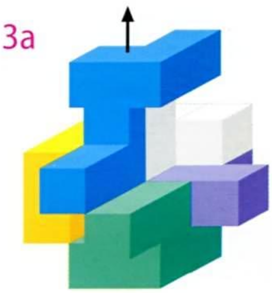
Элемент № 2 смещается вперед.

2b



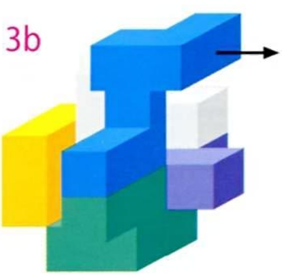
Теперь сместите элемент № 2 влево и извлеките его, потянув вперед.

3a



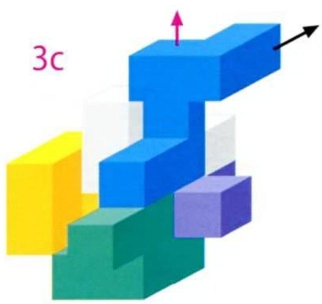
Элемент № 3 смещается вверх.

3b



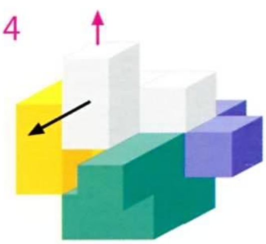
Теперь сместите элемент № 3 вправо.

3c



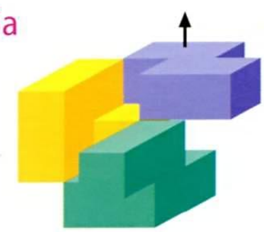
Наконец, сдвиньте элемент № 3 назад так, чтобы его можно было извлечь через отверстие сверху.

4



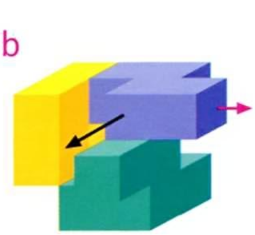
Сдвиньте элемент № 4 вперед и извлеките его через отверстие сверху.

5a



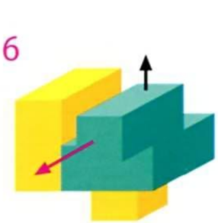
Сместите элемент № 5 вверх.

5b



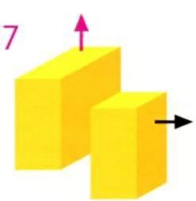
Теперь сдвиньте элемент № 5 вперед так, чтобы его можно было извлечь через отверстие слева.

6



Элемент № 6 можно извлечь, сдвинув его сначала вверх, затем вперед.

7



Извлеките последний элемент (№ 7) через верхнее отверстие, для чего сдвиньте его вправо.


18
17
3
11
8
7
19
9
6
5
4
16
14
1
2
12
15
10
13